

УДК 531.57

С.В. Лутманов, В.А. Овчинников

*Пермский государственный национальный
исследовательский университет*

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
8 (342) 2-396-309

ОПТИМАЛЬНАЯ КОРРЕКЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Исследуется управляемое твердое тело, вращающееся относительно неподвижной точки. Для описания его движения используются кинематические и динамические уравнения Эйлера. Решена обратная задача динамики по определению программного управления телом, реализующего заданный кинематический закон вращения тела. Построена линеаризованная модель движения тела в окрестности его базового движения. Найдено оптимальное по критерию "минимум энергии" дополнительное управление, переводящее фазовый вектор линеаризованной системы в начало координат. Показано, что это управление можно эффективно использовать для возвращения движения тела на базовую траекторию.

Ключевые слова: математическая модель; линеаризованные дифференциальные уравнения; полная управляемость; оптимальное управление.

Введение

В данной работе исследуется управляемое твердое тело, вращающееся относительно неподвижной точки. Исследование производится в соответствии с методикой, представленной в статье [2] и содержит следующие пункты:

– вывод дифференциальных уравнений движения управляемого динамического объекта;

- подбор базового кинематического закона движения тела, удовлетворяющего заданным формализованным требованиям;
- решение обратной задачи динамики по нахождению программного управления, реализующего базовый закон движения тела;
- построение линеаризованных дифференциальных уравнений управляемого движения в окрестности базового кинематического закона, описывающих динамику возмущений;
- проверка качества полученной линеаризации;
- проверка линеаризованной системы на полную управляемость;
- решение задачи оптимального управления по обнулению возмущений по критерию "минимум энергии";
- проверка качества полученных управлений для исходной нелинейной модели вращения твердого тела относительно неподвижной точки.

1. Описание модели и постановка задачи

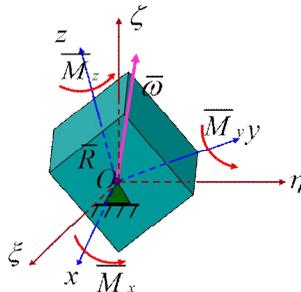


Рис. 1

Абсолютно твердое тело вращается относительно неподвижной точки O (см. рис. 1). С телом связана подвижная система координат $Oxyz$, оси которой совпадают с главными осями инерции. Тензор инерции тела и вектор мгновенной угловой скорости в этой системе координат имеют вид

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

К телу приложен управляющий момент

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}.$$

Положение тела относительно неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$ определяется углами Эйлера φ, ψ, θ (см. рис. 2).

Задано начальное $\varphi_0, \psi_0, \theta_0, \dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_0, \dot{\theta}_0$ и конечное $\varphi_1, \psi_1, \theta_1, \dot{\varphi}_1, \dot{\psi}_1, \dot{\theta}_1$ положение тела в углах Эйлера и их производных. Управление объектом производится на промежутке времен $[t_0, t_1]$

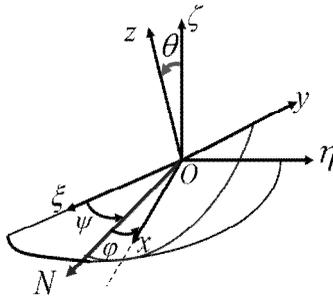


Рис. 2

Определение 1. Интегрируемую вектор-функцию

$$v = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} : [t_0, t_1] \rightarrow R^3$$

будем называть программным управлением твердым телом, вращающимся относительно неподвижной точки.

В статье решаются следующие две задачи.

Задача 1. Найти программное управление $\hat{v}(\cdot)$, переводящее твердое тело из заданного начального положения $\varphi_0, \psi_0, \theta_0, \dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_0, \dot{\theta}_0$ в конечное положение $\varphi_1, \psi_1, \theta_1, \dot{\varphi}_1, \dot{\psi}_1, \dot{\theta}_1$ в момент времени t_1 .

Определение 2. Управление $\hat{v}(\cdot)$ будем называть базовым программным управлением. Символом $\begin{pmatrix} \hat{\phi}(\cdot) \\ \hat{\psi}(\cdot) \\ \hat{\theta}(\cdot) \end{pmatrix}$ обозначим кинематический закон движения твердого тела, отвечающий программному управлению $\hat{v}(\cdot)$.

Определение 3. Закон движения $\begin{pmatrix} \hat{\phi}(\cdot) \\ \hat{\psi}(\cdot) \\ \hat{\theta}(\cdot) \end{pmatrix}$ будем называть базовым кинематическим законом движения твердого тела.

Задача 2. Для малого отклонения твердого тела от заданных начальных условий построить дополнительное программное управление $\tilde{u}^0(\cdot) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1^0(\cdot) \\ \tilde{u}_2^0(\cdot) \\ \tilde{u}_3^0(\cdot) \end{pmatrix} : [t_0, t_1] \rightarrow R^3$, совмещающее кинематический закон движения тела с его базовым законом в момент времени $T \in (t_0, t_1]$ и минимизирующее при этом величину

$$I[u(\cdot)] = \min_{u(\cdot)} \left[\int_{t_0}^T u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Решения сформулированных задач будут иллюстрироваться на следующих числовых данных

$$A = 10 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, B = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, C = 6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$\varphi_0 = 0.5 \text{ рад}, \psi_0 = 0.3 \text{ рад}, \theta_0 = 0.2 \text{ рад},$$

$$\dot{\varphi}_0 = 0.1 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\psi}_0 = 0.3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\theta}_0 = 0.2 \frac{\text{рад}}{\text{сек}},$$

$$\varphi_1 = 0.3 \text{ рад}, \psi_1 = 0.2 \text{ рад}, \theta_1 = 0.1 \text{ рад},$$

$$\dot{\varphi}_1 = 0.3 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\psi}_1 = 0.2 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, \dot{\theta}_1 = 0.4 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}, t_0 = 0 \text{ сек}, t_1 = 1 \text{ сек}.$$

2. Решение задачи 1

Решение задачи 1 начнем с подбора закона изменения углов Эйлера

$$\varphi = \hat{\varphi}(t), \psi = \hat{\psi}(t), \theta = \hat{\theta}(t), \quad (2.1)$$

удовлетворяющего условиям:

$$\hat{\varphi}(0) = \varphi_0, \hat{\varphi}(1) = \varphi_1, \dot{\hat{\varphi}}(0) = \dot{\varphi}_0, \dot{\hat{\varphi}}(1) = \dot{\varphi}_1,$$

$$\hat{\psi}(0) = \psi_0, \hat{\psi}(1) = \psi_1, \dot{\hat{\psi}}(0) = \dot{\psi}_0, \dot{\hat{\psi}}(1) = \dot{\psi}_1,$$

$$\hat{\theta}(0) = \theta_0, \hat{\theta}(1) = \theta_1, \dot{\hat{\theta}}(0) = \dot{\theta}_0, \dot{\hat{\theta}}(1) = \dot{\theta}_1.$$

Законы (2.1) будем искать в виде:

$$\hat{\varphi}(t) = a_{3\varphi}t^3 + a_{2\varphi}t^2 + a_{1\varphi}t + a_{0\varphi},$$

$$\hat{\psi}(t) = a_{3\psi}t^3 + a_{2\psi}t^2 + a_{1\psi}t + a_{0\psi},$$

$$\hat{\theta}(t) = a_{3\theta}t^3 + a_{2\theta}t^2 + a_{1\theta}t + a_{0\theta}.$$

Коэффициенты $a_{3\varphi}, a_{2\varphi}, a_{1\varphi}, a_{0\varphi}$ определяются из условий:

$$a_{3\varphi}t_0^3 + a_{2\varphi}t_0^2 + a_{1\varphi}t_0 + a_{0\varphi} = \varphi_0, \quad 3a_{3\varphi}t_0^2 + 2a_{2\varphi}t_0 + a_{1\varphi} = \dot{\varphi}_0,$$

$$a_{3\varphi}t_1^3 + a_{2\varphi}t_1^2 + a_{1\varphi}t_1 + a_{0\varphi} = \varphi_1, \quad 3a_{3\varphi}t_1^2 + 2a_{2\varphi}t_1 + a_{1\varphi} = \dot{\varphi}_1$$

Коэффициенты $a_{3\psi}, a_{2\psi}, a_{1\psi}, a_{0\psi}$ определяются из условий:

$$a_{3\psi}t_0^3 + a_{2\psi}t_0^2 + a_{1\psi}t_0 + a_{0\psi} = \psi_0, \quad 3a_{3\psi}t_0^2 + 2a_{2\psi}t_0 + a_{1\psi} = \dot{\psi}_0,$$

$$a_{3\psi}t_1^3 + a_{2\psi}t_1^2 + a_{1\psi}t_1 + a_{0\psi} = \psi_1, \quad 3a_{3\psi}t_1^2 + 2a_{2\psi}t_1 + a_{1\psi} = \dot{\psi}_1$$

Коэффициенты $a_{3\theta}, a_{2\theta}, a_{1\theta}, a_{0\theta}$ определяются из условий:

$$a_{3\theta}t_0^3 + a_{2\theta}t_0^2 + a_{1\theta}t_0 + a_{0\theta} = \theta_0, \quad 3a_{3\theta}t_0^2 + 2a_{2\theta}t_0 + a_{1\theta} = \dot{\theta}_0,$$

$$a_{3\theta}t_1^3 + a_{2\theta}t_1^2 + a_{1\theta}t_1 + a_{0\theta} = \theta_1, \quad 3a_{3\theta}t_1^2 + 2a_{2\theta}t_1 + a_{1\theta} = \dot{\theta}_1$$

Кинематический закон движения вращающегося тела однозначно определяет закон изменения проекций вектора угловой скорости на оси подвижной системы координат в функциях времени.

Связь между проекциями вектора мгновенной угловой скорости и углами Эйлера и их производными осуществляется посредством кинематических уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Динамика движения тела в проекциях на оси подвижной системы описывается динамическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= M_{Ox}, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= M_{Oy}, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= M_{Oz}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Базовые законы изменения проекций угловой скорости на оси подвижной системы координат $\hat{p}(\cdot), \hat{q}(\cdot), \hat{r}(\cdot)$ находим, подставив найденные базовые законы изменения углов Эйлера (2.1) в кинематические уравнения Эйлера (2.2)

$$\begin{aligned} \hat{p}(t) &= \dot{\psi} \sin \hat{\theta} \sin \hat{\varphi} + \dot{\hat{\theta}} \cos \hat{\varphi}, \\ \hat{q}(t) &= \dot{\psi} \sin \hat{\theta} \cos \hat{\varphi} - \dot{\hat{\theta}} \sin \hat{\varphi}, \\ \hat{r}(t) &= \dot{\psi} \cos \hat{\theta} + \dot{\hat{\varphi}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Базовые управляющие моменты

$$\hat{M}_{Ox}(\cdot), \hat{M}_{Oy}(\cdot), \hat{M}_{Oz}(\cdot),$$

обеспечивающие базовый закон движения тела, находим, подставив функции

$$\hat{p}(\cdot), \hat{q}(\cdot), \hat{r}(\cdot)$$

в динамические уравнения Эйлера (2.3)

$$\begin{aligned} \hat{M}_{Ox}(t) &= A\dot{\hat{p}} + (C - B)\hat{q}\hat{r}, \\ \hat{M}_{Oy}(t) &= B\dot{\hat{q}} + (A - C)\hat{r}\hat{p}, \\ \hat{M}_{Oz}(t) &= C\dot{\hat{r}} + (B - A)\hat{p}\hat{q}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Программные управления (2.5) являются решением задачи 1.

3. Решение задачи 2

Под возмущенным движением динамического объекта будем понимать такое его движение, начальные условия для которого мало отличаются от начальных условий базового движения

Дифференциальные уравнения движения объекта (2.2), (2.3) разрешаем относительно производных и подставляем в них базовые управляющие моменты

$$\hat{M}_{Ox}(\cdot), \hat{M}_{Oy}(\cdot), \hat{M}_{Oz}(\cdot).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -p \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta - q \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta + r, \\ \dot{\psi} &= q \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} + p \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \\ \dot{p} &= -\frac{C-B}{A} q r + \frac{1}{A} \hat{M}_{Ox}, \\ \dot{q} &= -\frac{A-C}{B} r p + \frac{1}{B} \hat{M}_{Oy}, \\ \dot{r} &= -\frac{B-A}{C} p q + \frac{1}{C} \hat{M}_{Oz}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Начальным углам и их производным даем малые возмущения

$$\delta \varphi^0, \delta \psi^0, \delta \theta^0, \delta \dot{\varphi}^0, \delta \dot{\psi}^0, \delta \dot{\theta}^0.$$

В результате они принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi_{voz}^0 &= \varphi^0 + \delta \varphi^0, \psi_{voz}^0 = \psi^0 + \delta \psi^0, \theta_{voz}^0 = \theta^0 + \delta \theta^0, \\ \dot{\varphi}_{voz}^0 &= \dot{\varphi}^0 + \delta \dot{\varphi}^0, \dot{\psi}_{voz}^0 = \dot{\psi}^0 + \delta \dot{\psi}^0, \dot{\theta}_{voz}^0 = \dot{\theta}^0 + \delta \dot{\theta}^0 \end{aligned}$$

Из кинематических уравнений Эйлера определяем возмущенные начальные проекции вектора угловой скорости

$$\begin{aligned} p_{voz}^0 &= \dot{\psi}_{voz}^0 \sin \theta_{voz}^0 \sin \varphi_{voz}^0 + \dot{\theta}_{voz}^0 \cos \varphi_{voz}^0, \\ q_{voz}^0 &= \dot{\psi}_{voz}^0 \sin \theta_{voz}^0 \cos \varphi_{voz}^0 - \dot{\theta}_{voz}^0 \sin \varphi_{voz}^0, \\ r_{voz}^0 &= \dot{\psi}_{voz}^0 \cos \theta_{voz}^0 + \dot{\varphi}_{voz}^0. \end{aligned}$$

Уравнения (3.1) интегрируем с возмущенными начальными условиями

$$\varphi_{voz}^0, \psi_{voz}^0, \theta_{voz}^0, p_{voz}^0, q_{voz}^0, r_{voz}^0.$$

Полученное решение

$$p = p_{voz}(t), q = q_{voz}(t), r = r_{voz}(t), \\ \varphi = \varphi_{voz}(t), \psi = \psi_{voz}(t), \theta = \theta_{voz}(t),$$

будем называть возмущенным движением объекта. Очевидно, что базовый и возмущенный законы движения не совпадают между собой.

Под возмущением базового закона движения динамического объекта, будем понимать функции

$$\delta p_{voz}(t) = p_{voz}(t) - \hat{p}(t), \delta q_{voz}(t) = \\ = q_{voz}(t) - \hat{q}(t), \delta r_{voz}(t) = r_{voz}(t) - \hat{r}(t), \\ \delta \varphi_{voz}(t) = \varphi_{voz}(t) - \hat{\varphi}(t), \delta \psi_{voz}(t) = \psi_{voz}(t) - \hat{\psi}(t), \\ \delta \theta_{voz}(t) = \theta_{voz}(t) - \hat{\theta}(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (3.2)$$

Заметим, что если, начиная с некоторого момента времени все возмущения обратятся в ноль, то, начиная с этого момента времени возмущенный закон движения будет совпадать с базовым законом.

В случае малых возмущений их динамику достаточно точно можно описать линеаризованной в окрестности базового движения системы дифференциальных уравнений исходной модели (2.2),(2.3). Осуществим указанную линеаризацию.

С этой целью в дифференциальных уравнениях (3.1) введем дополнительные управления u_1, u_2, u_3 .

Тогда

$$\dot{\varphi} = -p \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta - q \cos \varphi \operatorname{ctg} \theta + r, \\ \dot{\psi} = q \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} + p \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}, \\ \dot{\theta} = p \cos \varphi - q \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p} &= -\frac{C-B}{A}qr + \frac{1}{A}(\hat{M}_{Ox} + u_1), \\
 \dot{q} &= -\frac{A-C}{B}rp + \frac{1}{B}(\hat{M}_{Oy} + u_2), \\
 \dot{r} &= -\frac{B-A}{C}pq + \frac{1}{C}(\hat{M}_{Oz} + u_3)
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Дифференциальные уравнения (3.3) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
 \dot{p} &= P(q, r, M_{Ox} + u_1), & \dot{\varphi} &= \Phi(p, q, \varphi, \theta), \\
 \dot{q} &= Q(p, r, M_{Oy} + u_2), & \dot{\psi} &= \Psi(p, q, \varphi, \theta), \\
 \dot{r} &= R(p, q, M_{Oz} + u_3), & \dot{\theta} &= \Xi(p, q, \varphi).
 \end{aligned}$$

и нормализуем их заменой

$$\begin{aligned}
 p &= x_1, q = x_2, r = x_3, \varphi = x_4, \psi = x_5, \theta \\
 \theta &= x_6, M_{Ox} = v_1, M_{Oy} = v_2, M_{Oz} = v_3,
 \end{aligned}$$

т.е. приведем к виду:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= P(x_2, x_3, v_1 + u_1), \\
 \dot{x}_2 &= Q(x_1, x_3, v_2 + u_2), \\
 \dot{x}_3 &= R(x_1, x_2, v_3 + u_3), \\
 \dot{x}_4 &= \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6), \\
 \dot{x}_5 &= \Psi(x_1, x_2, x_4, x_6), \\
 \dot{x}_6 &= \Xi(x_1, x_2, x_4).
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Базовый закон изменения новых координат и базовых управлений записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_1(t) &= \hat{p}(t), \hat{x}_2(t) = \hat{q}(t), \hat{x}_3(t) = \hat{r}(t), \hat{x}_4(t) = \hat{\varphi}(t), \\
 \hat{x}_5(t) &= \hat{\psi}(t), \hat{x}_6(t) = \hat{\theta}(t), \\
 \hat{v}_1(t) &= \hat{M}_{Ox}(t), \hat{v}_2(t) = \hat{M}_{Oy}(t), \hat{v}_3(t) = \hat{M}_{Oz}(t), \quad t \in [t_0, t_1].
 \end{aligned}$$

Произведем линеаризацию уравнений (3.4) в окрестности пары "базовый закон движения, базовое программное управление" в новых координатах. В результате получается

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{3.5}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial P(x_2, x_3, v_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial P(x_2, x_3, v_1)}{\partial x_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q(x_1, x_3, v_2)}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial Q(x_1, x_3, v_2)}{\partial x_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial R(x_1, x_2, v_3)}{\partial x_1} & \frac{\partial R(x_1, x_2, v_3)}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi(x_1, x_2, x_4, x_6)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi(x_1, x_2, x_4, x_6)}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6)}{\partial x_4} & 0 & \frac{\partial \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial \Psi(x_1, x_2, x_4, x_6)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi(x_1, x_2, x_4, x_6)}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \Psi(x_1, x_2, x_4, x_6)}{\partial x_4} & 0 & \frac{\partial \Psi(x_1, x_2, x_4, x_6)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial \Xi(x_1, x_2, x_4)}{\partial x_1} & \frac{\partial \Xi(x_1, x_2, x_4)}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \Xi(x_1, x_2, x_4)}{\partial x_4} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\begin{matrix} x_1 = \hat{x}_1(t), \\ x_2 = \hat{x}_2(t), \\ x_3 = \hat{x}_3(t), \\ x_4 = \hat{x}_4(t), \\ x_5 = \hat{x}_5(t), \\ x_6 = \hat{x}_6(t), \\ v_1 = \hat{v}_1(t), \\ v_2 = \hat{v}_2(t), \\ v_3 = \hat{v}_3(t). \end{matrix}$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P(x_2, x_3, v_1)}{\partial v_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial Q(x_1, x_3, v_2)}{\partial v_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial R(x_1, x_2, v_3)}{\partial v_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{matrix} x_1 = \hat{x}_1(t), \\ x_2 = \hat{x}_2(t), \\ x_3 = \hat{x}_3(t), \\ x_4 = \hat{x}_4(t), \\ x_5 = \hat{x}_5(t), \\ x_6 = \hat{x}_6(t), \\ v_1 = \hat{v}_1(t), \\ v_2 = \hat{v}_2(t), \\ v_3 = \hat{v}_3(t). \end{matrix}$

Проверяется качество проведенной линеаризации. Для этого линеаризованные дифференциальные уравнения (3.5) при нулевых значениях управлений интегрируются с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= p_{\text{voz}}^0 - p_0, x_2(t_0) = q_{\text{voz}}^0 - q_0, x_3(t_0) = r_{\text{voz}}^0 - r_0, \\ x_4(t_0) &= \delta\varphi^0, x_5(t_0) = \delta\psi^0, x_6(t_0) = \delta\theta^0. \end{aligned}$$

Полученное решение

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t), \\ x_4 &= x_4(t), x_5 = x_5(t), x_6 = x_6(t), [t_0, t_1] \end{aligned}$$

является аппроксимацией возмущений

$$\delta p_{\text{voz}}(t), \delta q_{\text{voz}}(t), \delta r_{\text{voz}}(t), \delta\varphi_{\text{voz}}(t), \delta\psi_{\text{voz}}(t), \delta\theta_{\text{voz}}(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Линеаризованные уравнения (3.5) будем трактовать как дифференциальные уравнения движения некоторого вспомогательного управляемого линейного динамического объекта на промежутке времени $[t_0, T], T \in (t_0, t_1)$, в котором управлениями являются дополнительные управления исходной (нелинейной) модели. В численном эксперименте полагаем $T = \frac{t_1}{2}$.

Можно показать [1], что линейный динамический объект является вполне управляемым.

Для управляемого линейного динамического объекта (3.5) с начальными условиями

$$x_1^0 = \delta p^0, x_2^0 = \delta q^0, x_3^0 = \delta r^0, x_4^0 = \delta\varphi^0, x_5^0 = \delta\psi^0, x_6^0 = \delta\theta^0$$

сформулируем следующую задачу оптимального управления

Задача. Определить программные управления $\tilde{u}_1^0(\cdot), \tilde{u}_2^0(\cdot), \tilde{u}_3^0(\cdot)$, для которых $x_1(T) = \dots = x_6(T) = 0$ (3.6)

$$\begin{aligned} \text{и} \quad & \left[\int_{t_0}^T (u_1^0(\tau))^2 + (u_2^0(\tau))^2 + (u_3^0(\tau))^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \\ & = \min_{u(\cdot)} \left[\int_{t_0}^T u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) + u_3^2(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где минимум берется по всем программным управлениям, для которых выполнено условие (3.6).

Следуя [1] приведем процедуру построения оптимального управления в этой задаче.

Последовательно находим переходную матрицу объекта

$$H[T, \tau] = X[T, \tau]B(\tau), \quad \tau \in [t_0, T]$$

матрицу коэффициентов

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{16} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{61} & \cdots & \alpha_{66} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij} = \int_{t_0}^T \langle h^i(\tau), h^j(\tau) \rangle d\tau, \quad i, j = 1, \dots, 6$$

где $h^i(\cdot)$ i -я строка матрицы $H[T, \tau]$ и вектор $b = -X[T, t_0]x^0$.

Решаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\Lambda \lambda = b.$$

Пусть $\lambda_1^0, \dots, \lambda_6^0$ – ее решение. Оптимальное программное управление имеет вид

$$\tilde{u}^0(t) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i^0 h^i(t), \quad t \in [t_0, T].$$

Построенное оптимальное управление $\tilde{u}^0(\cdot)$ переводит фазовый вектор системы (3.5), а значит и возмущения (3.2) нелинейной системы, в начало координат. В частности, для численного эксперимента получилось

$$\begin{aligned} x_1(T) &= 1.28453 \times 10^{-8}, x_2(T) = -2.71453 \times 10^{-9}, x_3(T) = 9.1165 \times 10^{-9}, \\ x_4(T) &= 1.29182 \times 10^{-7}, x_5(T) = -1.31111 \times 10^{-7}, x_6(T) = -8.43941 \times 10^{-11}. \end{aligned}$$

На базе управления $\tilde{u}^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, полученного при решении задачи оптимального управления для линейной модели, строится оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, решающее задачу 2.

$$\text{Полагаем} \quad u^0(t) = \begin{cases} \tilde{u}^0(t), & t \in [t_0, T], \\ 0, & t \in [T, t_1] \end{cases}. \quad (3.7)$$

Убедимся, что управление (3.7) действительно решает задачу 2. Для этого управление $u^0(\cdot)$ следует подставить в исходные дифференциальные (нелинейные) уравнения движения объекта

$$\begin{aligned} x_1 &= P(x_2, x_3, \hat{v}_1 + u_1^0), & x_4 &= \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6), \\ x_2 &= Q(x_1, x_3, \hat{v}_2 + u_2^0), & x_5 &= \Psi(x_1, x_2, x_4, x_6), \\ x_3 &= R(x_1, x_2, \hat{v}_3 + u_3^0), & x_6 &= \Xi(x_1, x_2, x_4). \end{aligned}$$

и проинтегрировать их с возмущенными начальными условиями. Начиная с момента времени $T \in (t_0, t_1)$ решение системы дифференциальных уравнений должно мало отличаться от базового закона движения. В справедливости этого утверждения можно убедиться на графиках, представленных на рис. 3.

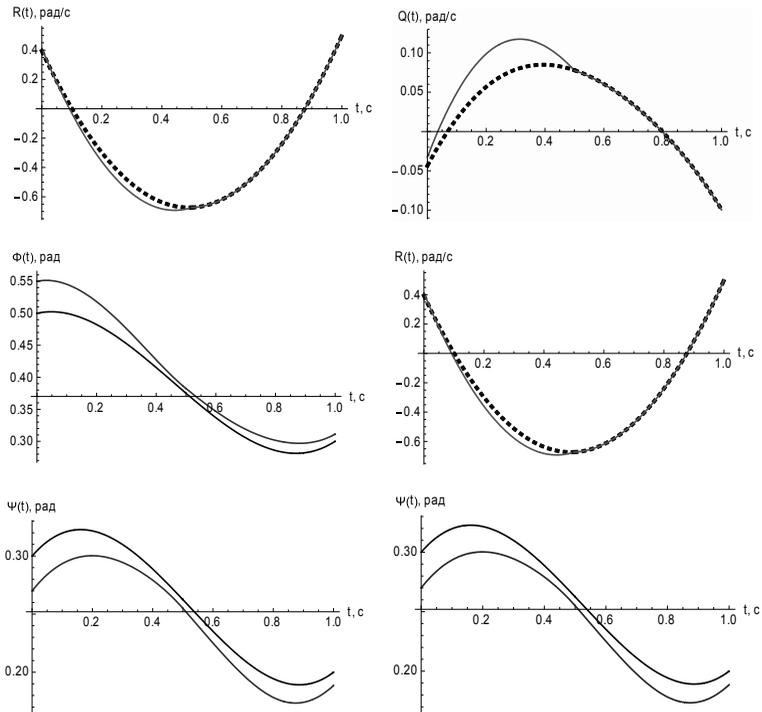


Рис. 3

Заключение

В работе построена математическая модель управляемого твердого тела, вращающегося относительно неподвижной точки.

Подобран кинематический закон движения объекта (базовый), удовлетворяющий заданным требованиям.

Решена обратная задача динамики по построению программного (базового) управления объектом, реализующего указанный кинематический закон движения.

Проведена линеаризация уравнений управляемого движения в окрестности базовой пары "управление – движение".

Установлена полная управляемость линеаризованной модели.

Решена вспомогательная задача оптимального управления линеаризованной моделью о переводе ее фазового вектора в начало координат.

Показано, что на базе решения задачи оптимального управления линеаризованной моделью эффективно решается задача о возвращении возмущенного движения исходной (нелинейной) модели на базовую траекторию.

Библиографический список

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. *Лутманов С.В.* Об одной методике исследования управляемой динамической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(36). С. 13–20.